

一类具有可变延迟 Lasota-Ważewska 模型的渐近概周期解

姚慧丽, 孙 影

(哈尔滨理工大学 理学院, 哈尔滨 150080)

摘 要: 由于 Lasota-Ważewska 模型与生物数学有着密不可分的联系, 所以研究此模型的各种解的存在性成为了很多数学工作者关注的问题。将针对一类具有可变延迟的 Lasota-Ważewska 模型的渐近概周期解进行研究。利用函数的一致连续性, 渐近概周期函数的相关理论以及 Banach 压缩映射原理, 讨论该类模型的渐近概周期解的存在性以及唯一性。

关键词: Lasota-Ważewska 模型; 渐近概周期解; 延迟; Banach 压缩映射原理

DOI: 10.15938/j.jhust.2021.05.019

中图分类号: O177.92 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2021)05-0152-05

Asymptotically Almost Periodic Solutions for a Class of Lasota-Ważewska models with Variable Delay

YAO Hui-Li, SUN Ying

(School of Applied Sciences, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: Because Lasota-Ważewska models are closely related to biological mathematics, studying various solutions for the models has become concerns for many mathematical workers. Asymptotically almost periodic solutions will be studied for a class of Lasota-Ważewska models with variable delay in this paper. Using the uniform continuity of functions, related theories of asymptotically almost periodic functions and Banach compression mapping principle, the existence and uniqueness of asymptotically almost periodic solutions for this kind of models are discussed.

Keywords: Lasota-Ważewska models; asymptotically almost periodic solutions; delay; Banach compression mapping principle

0 引 言

各类微分方程是各学科研究不同问题的需要而提出的数学模型。自概周期型函数理论^[1-4]和概自

守型函数理论^[5-7]建立以来, 数学研究者已将其应用到了各类方程中, 得到了一批研究成果^[8-13]。其中 Lasota-Ważewska 模型最早是由 Lasota 和 Ważewska-Czyżewska 两位学者提出的^[14]。该模型可对动物体内的红血球的再生情况进行描述。近些年, 许

收稿日期: 2020-05-17

基金项目: 黑龙江省自然科学基金(A2018006)。

作者简介: 孙 影(1996—), 女, 硕士研究生。

通信作者: 姚慧丽(1970—), 女, 博士, 教授, E-mail: Huili_yao@sohu.com。

多数研究者对该类模型的各种解的相关问题进行了研究。如2008年,景冰清,王丽丽,对一般 Lasota-Ważewska 模型存在唯一正周期解的充分条件进行了研究^[15]。2011年,柏琼,冯春华对具有非线性脉冲的 Lasota-Ważewska 模型的概周期解的存在性与指数稳性进行了研究^[16]。2018年,王丽等^[17]对一类具有时滞的 Lasota-Ważewska 模型的伪概周期解的存在唯一性及全局吸引力进行了研究。关于此类模型的其他一些研究成果可参见文[18-19]。此但相比之下,研究这类模型的渐近概周期解的文献较少,因此本文将讨论带有可变时滞的 Lasota-Ważewska 模型

$$x'(t) = -\alpha(t)x(t) + \sum_{i=1}^n \beta_i(t)e^{-\gamma_i(t)x(t-h(t))} \quad (1)$$

的渐近概周期解的存在以及唯一性。

1 预备知识

本文中, $\mathbf{R}$ 表示实数集, $C(\mathbf{R})$ 表示定义在 $\mathbf{R}$ 上且取值为实值有界连续函数全体。

定义1^[18] $\mathbf{R}$ 的一个子集 P 称为在 $\mathbf{R}$ 上是相对稠密的,是指存在 $l > 0$ 使得

$$[a, a+l] \cap P \neq \emptyset, a \in \mathbf{R}$$

定义2^[19] $f \in C(\mathbf{R})$ 称为是概周期函数,是指若对于任意的 $\varepsilon > 0$,存在 $\mathbf{R}$ 的相对稠密子集 P_ε 使得 $|f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon, \tau \in P_\varepsilon, t \in \mathbf{R}$ 用 $AP(\mathbf{R})$ 表示全体概周期函数组成的集合。

定义3^[20] $f \in C(\mathbf{R})$ 称为是渐近周期函数,是指若对于任意的 $\varepsilon > 0$,存在 $\mathbf{R}$ 的相对稠密子集 P_ε 和有界子集 C_ε 使得

$$|f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon, \tau \in P_\varepsilon, t, t+\tau \in \mathbf{R} \setminus C_\varepsilon$$

用 $AAP(\mathbf{R})$ 表示全体渐近概周期函数组成的集合。

定义3的等价定义如下:

定义4^[20] $f \in C(\mathbf{R})$ 称为是渐近概周期函数是指若 $f(\cdot)$ 可写成 $f(\cdot) = f_1(\cdot) + f_0(\cdot)$,其中 $f_1 \in AP(\mathbf{R}), f_0 \in C_0(\mathbf{R})$,这里 $C_0(\mathbf{R}) = \{f \in C(\mathbf{R}) : \lim_{|t| \rightarrow \infty} f(t) = 0\}$ 。

2 主要结果

本节将对 Lasota-Ważewska 模型(1)的渐近概周期解的存在性及唯一性进行研究。先给出两个命题。

命题1 若 x 是 $\mathbf{R}$ 上的渐近概周期函数, h 是 $\mathbf{R}$

上的正渐近概周期函数,则函数 $x(\cdot - h(\cdot))$ 也是渐近概周期的。

证明:由于 $x(s)$ 是渐近的,所以是一致连续的,从而对任意 $\varepsilon > 0$,存在 $\gamma = \gamma(\varepsilon) > 0$,当

$$s_1, s_2 \in \mathbf{R}, |s_1 - s_2| < \gamma \text{ 时, 有 } |x(s_1) - x(s_2)| < \varepsilon。$$

对于上述 $\gamma > 0$,由于 $h(s)$ 是渐近的,所以存在一个相对稠密子集 P_ε 和一个有界集 $C_\varepsilon = [-G_1, G_1]$,使得

$$|h(s+\tau) - h(s)| < \gamma \quad (\tau \in P_\varepsilon, s, s+\tau \in \mathbf{R} \setminus C_\varepsilon)$$

而

$$|s - h(s+\tau) - (s - h(s))| = |h(s+\tau) - h(s)| < \gamma$$

所以有

$$|x(s - h(s+\tau)) - x(s - h(s))| < \varepsilon, (\tau \in P_\varepsilon, s, s+\tau \in \mathbf{R} \setminus C_\varepsilon) \quad (2)$$

由于 $x(s)$ 是渐近的,所以由定义3对上述 $\varepsilon > 0$,存在相对稠密子集 Q_ε 和有界集 $D_\varepsilon = [-G_2, G_2]$,使得 $|x(s+\tau) - x(s)| < \varepsilon \quad (\tau \in Q_\varepsilon, s, s+\tau \in \mathbf{R} \setminus D_\varepsilon)$

(3)

又 $h(\cdot)$ 是正的有界函数,所以存在 $G_0 > 0$ 使得 $0 \leq h(s) \leq G_0, s \in \mathbf{R}$ 。对上述 $\varepsilon > 0$,取 $G = G_1 + G_2 + G_0$,令 $R_\varepsilon = P_\varepsilon \cap Q_\varepsilon, O_\varepsilon = [-G, G]$,则 R_ε 为相对稠密子集, O_ε 为有界子集。取 $\tau \in R_\varepsilon, s, s+\tau \in \mathbf{R} \setminus O_\varepsilon$,结合式(2)和式(3)有

$$\begin{aligned} & |x(s+\tau - h(s+\tau)) - x(s - h(s))| = \\ & |x(s+\tau - h(s+\tau)) - x(s - h(s+\tau)) + \\ & x(s - h(s+\tau) - x(s - h(s)))| \leq \\ & |x(s+\tau - h(s+\tau)) - x(s - h(s+\tau))| + \\ & |x(s - h(s+\tau) - x(s - h(s)))| < \\ & \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

即得 $x(\cdot - h(\cdot))$ 是渐近概周期的。

命题2 若 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 是一致连续的, $x \in AAP(\mathbf{R}) (x \in AP(\mathbf{R}))$,且 $R_x \subset D_f$,则 $f(x(\cdot)) \in AAP(\mathbf{R}) (f(x(\cdot)) \in AP(\mathbf{R}))$ 。

证明:因为 $f(\cdot)$ 是一致连续的,所以对任意的 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta(\varepsilon) > 0$,当 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}, |x_1 - x_2| < \delta$ 时, $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ 。又 $x(\cdot) \in AAP(\mathbf{R})$,所以对上述 $\delta > 0$,存在相对稠密子集 $P_{\delta(\varepsilon)}$ 和有界子集 $C_{\delta(\varepsilon)}$,使得 $|x(t+\tau) - x(t)| < \delta, \tau \in P_{\delta(\varepsilon)}, t, t+\tau \in \mathbf{R} \setminus C_{\delta(\varepsilon)}$ 。于是有 $|f(x(t+\tau)) - f(x(t))| < \varepsilon, \tau \in P_{\delta(\varepsilon)}, t, t+\tau \in \mathbf{R} \setminus C_{\delta(\varepsilon)}$,由定义3知 $f(x(\cdot)) \in AAP(\mathbf{R})$ 。

注:当 $x \in AP(\mathbf{R})$ 时,类似可证 $f(x(\cdot)) \in AP(\mathbf{R})$ 。

为了表达方便,以下对每个正的连续函数 f ,记

$$f^+ = \sup_{t \in R} f(t), f^- = \inf_{t \in R} f(t).$$

本文的主要结果如下:

定理 1 对方程(1) 若以下假设

$(H_1) \alpha(\cdot)$ 是概周期函数且满足 $\alpha^- > 0, \beta_i(\cdot), \gamma_i(\cdot) (i = 1, 2, \dots, n)$ 以及 $h(\cdot)$ 都为正的渐近概周期函数;

$$(H_2) \sum_{i=1}^n \beta_i^+ \gamma_i^+ < \alpha^-$$

成立, 则方程(1) 存在唯一正的渐近概周期解。

证明: 方程(1) 对应的齐次方程为

$$x'(t) = -\alpha(t)x(t)$$

且该方程的解可表示为

$$x(t; t_0, x_0) = X(t, t_0)x_0, x(t_0) = x_0, t_0, x_0 \in \mathbf{R}$$

其中

$$X(t, s) = e^{-\int_s^t \alpha(u) du}$$

由常数变分法知方程(1) 的解满足下式

$$x(t) = \int_{-\infty}^t X(t, s) \sum_{i=1}^n \beta_i(s) e^{-\gamma_i(s)x(s-h(s))} ds \quad (4)$$

为了利用 Banach 压缩映射原理证明方程(1) 的渐近概周期解的存在唯一性, 令

$$U = \{x(\cdot) \in AAP(\mathbf{R}), m \leq x(t) \leq M\}$$

其中

$$M = \frac{1}{\alpha^-} \sum_{i=1}^n \beta_i^+, m = \frac{1}{\alpha^+} \sum_{i=1}^n \beta_i^- e^{-\gamma_i^+ M}$$

对 $x \in U$, 定义 $\|x\| = \sup_{t \in R} |x(t)|$, 则 U 是一个 Banach 空间。在 U 上定义映射 F :

$$\{Fx\}(t) = \int_{-\infty}^t X(t, s) \sum_{i=1}^n \beta_i(s) e^{-\gamma_i(s)x(s-h(s))} ds,$$

$x \in U$

为证明映射 F 在 U 中存在唯一不动点, 分两部分加以证明。

1) 证明映射 F 是从 U 到自身的映射。

首先, 对任意 $x \in U$, 有

$$\|Fx\| \leq \sup_{t \in R} \int_{-\infty}^t \left| X(t, s) \sum_{i=1}^n \beta_i(s) e^{-\gamma_i(s)x(s-h(s))} \right| ds \leq$$

$$\sup_{t \in R} \int_{-\infty}^t e^{-\alpha^-(t-s)} \sum_{i=1}^n \beta_i^+ ds \leq \frac{1}{\alpha^-} \sum_{i=1}^n \beta_i^+ = M$$

$$\|Fx\| \geq \sup_{t \in R} \int_{-\infty}^t \left| e^{-\alpha^+(t-s)} \sum_{i=1}^n \beta_i^- e^{-\gamma_i^+ M} \right| ds \geq$$

$$\frac{1}{\alpha^+} \sum_{i=1}^n \beta_i^- e^{-\gamma_i^+ M} = m$$

即得 $m \leq \{Fx\}(t) \leq M, \forall t \in R$ 。

接下来证明对 $x \in U, \{Fx\}(t)$ 也是渐近概周期的。因为 $x(\cdot), h(\cdot), \gamma_i(\cdot), \beta_i(\cdot) \in AAP(\mathbf{R})$, 所以

$$x(\cdot) = x_1(\cdot) + x_0(\cdot), h(\cdot) = h_1(\cdot) + h_0(\cdot), \\ \gamma_i(\cdot) = \gamma_{i1}(\cdot) + \gamma_{i0}(\cdot), \beta_i(\cdot) = \beta_{i1}(\cdot) + \beta_{i0}(\cdot) \\ \text{其中 } x_1(\cdot), h_1(\cdot), \gamma_{i1}(\cdot), \beta_{i1}(\cdot) \in AP(R), \\ x_0(\cdot), h_0(\cdot), \gamma_{i0}(\cdot), \beta_{i0}(\cdot) \in C_0(R), i = 1, 2, \dots, n. \text{ 令}$$

$$\{F_1x\}(t) = \int_{-\infty}^t X(t, s) \sum_{i=1}^n \beta_{i1}(s) e^{-\gamma_{i1}(s)x_1(s-h_1(s))} ds$$

和

$$\{F_0x\}(t) = \int_{-\infty}^t X(t, s) \sum_{i=1}^n \beta_{i0}(s) e^{-\gamma_{i0}(s)x(s-h(s))} ds -$$

$$\int_{-\infty}^t X(t, s) \sum_{i=1}^n \beta_{i1}(s) e^{-\gamma_{i1}(s)x_1(s-h_1(s))} ds$$

则

$$\{Fx\}(t) = \{F_1x\}(t) + \{F_0x\}(t) \quad (5)$$

因假设 (H_1) 成立, 所以由文[17] 知 $\{F_1x\}(t) \in AP(\mathbf{R})$, 因此为了证明 $\{Fx\}(t) \in AAP(\mathbf{R})$ 只需证明 $\{F_0x\}(t) \in C_0(R)$ 。首先易知 $\{F_0x\}(\cdot) \in C(R)$, 故为了证 $\{F_0x\}(t) \in C_0(R)$, 只需证明 $\lim_{|t| \rightarrow \infty} |\{F_0x\}(t)| = 0$ 。

由 $x_1(\cdot) \in AP(R)$ 以及概周期函数的平移不变性知 $x_1(\cdot - h_1(\cdot)) \in AP(R)$, 由命题 1 知 $x(\cdot - h(\cdot)) \in AAP(R)$ 。又 $AP(R)$ 和 $AAP(R)$ 对函数乘法是封闭的, 且 e^{-u} 在 $[0, +\infty)$ 由上是一致连续的, 所以由命题 2 知 $e^{-\gamma_{i1}(s)x_1(s-h_1(s))} \in AP(\mathbf{R})$, $e^{-\gamma_i(s)x(s-h(s))} \in AAP(\mathbf{R})$ 。再由 $AP(\mathbf{R})$ 和 $AAP(\mathbf{R})$ 对函数加法的封闭性得

$$\sum_{i=1}^n \beta_{i1}(s) e^{-\gamma_{i1}(s)x_1(s-h_1(s))} \in AP(R), \sum_{i=1}^n \beta_i(s) e^{-\gamma_i(s)x(s-h(s))} \in AAP(R) \quad (6)$$

由式(6) 和 定义 4 知

$$\sum_{i=1}^n \beta_i(s) e^{-\gamma_i(s)x(s-h(s))} - \sum_{i=1}^n \beta_{i1}(s) e^{-\gamma_{i1}(s)x_1(s-h_1(s))} \in C_0(\mathbf{R}).$$

由 $C_0(R)$ 的定义知存在 $M > 0$ 使得

$$\left| \sum_{i=1}^n \beta_i(s) e^{-\gamma_i(s)x(s-h(s))} - \sum_{i=1}^n \beta_{i1}(s) e^{-\gamma_{i1}(s)x_1(s-h_1(s))} \right| < M, s \in \mathbf{R} \quad (7)$$

以及对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $T_0 > 0$ 使得当 $|s| > T_0$ 时有

$$\left| \sum_{i=1}^n \beta_i(s) e^{-\gamma_i(s)x(s-h(s))} - \sum_{i=1}^n \beta_{i1}(s) e^{-\gamma_{i1}(s)x_1(s-h_1(s))} \right| < \varepsilon \quad (8)$$

又 $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\alpha^- t} = 0$, 所以对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $T_1 > 0$, 使得当 $t > T_1$ 时 $e^{-\alpha^- t} < \varepsilon$ 。取 $T = T_0 + T_1$, 于是当 $t < -T$ 时结合式(8) 有

$$\begin{aligned}
& | \{F_0 x\}(t) | = \\
& \left| \int_{-\infty}^t X(t,s) \sum_{i=1}^n (\beta_i(s) e^{-\gamma_i(s)x(s-h(s))} - \beta_{il}(s) e^{-\gamma_{il}(s)x_1(s-h_1(s))}) ds \right| \leq \\
& \left| \int_{-\infty}^t X(t,s) \sum_{i=1}^n \beta_i(s) e^{-\gamma_i(s)x(s-h(s))} - \sum_{i=1}^n \beta_{il}(s) e^{-\gamma_{il}(s)x_1(s-h_1(s))} ds \right| < \\
& \varepsilon \int_{-\infty}^t X(t,s) ds = \varepsilon \int_{-\infty}^t e^{-\int_s^t \alpha(u) du} ds \leq \varepsilon \int_{-\infty}^t e^{-\alpha^-(t-s)} ds < \frac{\varepsilon}{\alpha^-}
\end{aligned}$$

于是得到

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} | \{F_0 x\}(t) | = 0 \quad (9)$$

当 $t > T$ 时有

$$\begin{aligned}
& | \{F_0 x\}(t) | = \\
& \left| \int_{-\infty}^t X(t,s) \sum_{i=1}^n (\beta_i(s) e^{-\gamma_i(s)x(s-h(s))} - \beta_{il}(s) e^{-\gamma_{il}(s)x_1(s-h_1(s))}) ds \right| \leq \\
& \left| \int_{-\infty}^{-T_0} X(t,s) \sum_{i=1}^n (\beta_i(s) e^{-\gamma_i(s)x(s-h(s))} - \beta_{il}(s) e^{-\gamma_{il}(s)x_1(s-h_1(s))}) ds \right| + \\
& \left| \int_{-T_0}^t X(t,s) \sum_{i=1}^n (\beta_i(s) e^{-\gamma_i(s)x(s-h(s))} - \beta_{il}(s) e^{-\gamma_{il}(s)x_1(s-h_1(s))}) ds \right| + \\
& \left| \int_{T_0}^t X(t,s) \sum_{i=1}^n (\beta_i(s) e^{-\gamma_i(s)x(s-h(s))} - \beta_{il}(s) e^{-\gamma_{il}(s)x_1(s-h_1(s))}) ds \right| = \\
& I(t) + J(t) + N(t) \quad (10)
\end{aligned}$$

接下来对式(10)的最后三项分别加以讨论。

结合式(8)有

$$\begin{aligned}
I(t) & \leq \int_{-\infty}^{-T_0} X(t,s) \left| \sum_{i=1}^n \beta_i(s) e^{-\gamma_i(s)x(s-h(s))} - \right. \\
& \left. \sum_{i=1}^n \beta_{il}(s) e^{-\gamma_{il}(s)x_1(s-h_1(s))} \right| ds < \\
& \varepsilon \int_{-\infty}^{-T_0} X(t,s) ds \leq \varepsilon \int_{-\infty}^{-T_0} e^{-\alpha^-(t-s)} ds < \frac{\varepsilon}{\alpha^-} \quad (11)
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
N(t) & \leq \int_{T_0}^t X(t,s) \left| \sum_{i=1}^n \beta_i(s) e^{-\gamma_i(s)x(s-h(s))} - \right. \\
& \left. \sum_{i=1}^n \beta_{il}(s) e^{-\gamma_{il}(s)x_1(s-h_1(s))} \right| ds < \\
& \varepsilon \int_{T_0}^t X(t,s) ds \leq \varepsilon \int_{T_0}^t e^{-\alpha^-(t-s)} ds < \frac{\varepsilon}{\alpha^-} \quad (12)
\end{aligned}$$

结合式(7)有

$$\begin{aligned}
J(t) & \leq \int_{-T_0}^t X(t,s) \left| \sum_{i=1}^n \beta_i(s) e^{-\gamma_i(s)x(s-h(s))} - \right. \\
& \left. \sum_{i=1}^n \beta_{il}(s) e^{-\gamma_{il}(s)x_1(s-h_1(s))} \right| ds \leq \\
& M \int_{-T_0}^t X(t,s) ds < M \int_{-T_0}^t e^{-\alpha^-(t-s)} ds = \\
& \frac{M}{\alpha^-} (e^{-\alpha^-(t-T_0)} - e^{-\alpha^-(t+T_0)}) < \frac{M}{\alpha^-} e^{-\alpha^-(t-T_0)}
\end{aligned}$$

因为 $t > T$, 所以 $t - T_0 > T_1$, 由此得 $e^{-\alpha^-(t-T_0)} < \varepsilon_0$ 。

从而可得

$$\begin{aligned}
J(t) & = \left| \int_{-T_0}^t X(t,s) \sum_{i=1}^n (\beta_i(s) e^{-\gamma_i(s)x(s-h(s))} - \beta_{il}(s) e^{-\gamma_{il}(s)x_1(s-h_1(s))}) ds \right| < \\
& \frac{M}{\alpha^-} \varepsilon \quad (13)
\end{aligned}$$

由于 $t > T$ 时, 式(10) ~ (13) 成立, 所以可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} | \{F_0 x\}(t) | = 0 \quad (14)$$

结合式(9)和式(14)得 $\lim_{|t| \rightarrow \infty} | \{F_0 x\}(t) | = 0$, 由此

得 $\{F_0 x\}(t) \in C_0(R)$, 再结合 $\{F_1 x\}(t) \in AAP(R)$

再以及式(5)和定义4得 $\{F x\}(t) \in AP(R)$ 。

至此证明了映射 F 是从 U 到自身的映射。

2) 证明映射 F 是一个压缩映射。

事实上, 对于 $\forall x, y \in U$, 有

$$\begin{aligned}
\|F x - F y\| & = \sup_{t \in R} \left| \int_{-\infty}^t X(t,s) \sum_{i=1}^n \beta_i(s) (e^{-\gamma_i(s)x(s-h(s))} - e^{-\gamma_i(s)y(s-h(s))}) ds \right| \leq \\
& \sup_{t \in R} \int_{-\infty}^t X(t,s) \sum_{i=1}^n \beta_i^+ \gamma_i^+ |x(s-h(s)) - y(s-h(s))| ds \leq \\
& \sup_{t \in R} \sum_{i=1}^n \beta_i^+ \gamma_i^+ \|x - y\| \int_{-\infty}^t X(t,s) ds \leq \\
& \frac{1}{\alpha^-} \sum_{i=1}^n \beta_i^+ \gamma_i^+ \|x - y\|
\end{aligned}$$

由 (H_2) 知

$$\frac{1}{\alpha^-} \sum_{i=1}^n \beta_i^+ \gamma_i^+ < 1$$

故 $F: U \rightarrow U$ 是一个压缩映射。由 Banach 压缩映射原理知 F 在 U 中存在唯一不动点 x , 此不动点即为方程(1)满足式(4)的唯一正的渐近概周期解。

3 结 论

本文给出了一类带有可变延迟的 Lasota-Ważewska 模型(1)存在唯一的正的渐近概周期解的充分条件, 由于渐近概周期解比概周期解更具有有一般性, 所以本文研究结果会使这类模型应用更加广泛。

参 考 文 献:

- [1] BOHR H. Zur Theorie Der Fastperiodischen Funktionnel[J]. Acta Math, 1925, 45: 19.
- [2] FRECHET M. Les Fonctions Asymptotiquement Presque-Periodiques [J]. Continues. C. R. Acad. Sci Paris 1941, 213: 520.
- [3] W F Eberlein. Abstract Ergodic Theorems and Weak Almost Periodic Functions[J]. T. Am. Math Soc, 1949, 67(1): 217.
- [4] ZHANG C. Pseudo Almost Periodic Functions and Their Applications[D]. UWU, Ph. D. Thesis, 1992.
- [5] BOCHNER S. A New Approach to Almost Periodicity[J]. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 1962, 48(12): 2039.
- [6] N'GUEREKATA G M. Sur les Solutions Presque Automorphes D'

- équations Différentielles Abstraites [J]. Ann. Sci. Math. Québec, 1981, 1: 69.
- [7] XIAO T J, ZHU X X, LIANG J. Pseudo-Almost Automorphic Mild Solutions to Nonautonomous Differential Equations and Applications[J]. Nonlinear Analysis Theory Methods & Applications, 2008, 70(11): 4079.
- [8] SLYUSARCHUK V Y. Almost Periodic Solutions of Functional Equations[J]. J Math Sci, 2017, 222(3): 359.
- [9] DIAGANA T, HERNANDEZ E, RABELLO M. Pseudo Almost Periodic Solutions to Some Nonautonomous Neutral Functional Differential Equations with Unbounded Delay[J]. Math Comput Model. 2007, 45(9/10): 1241.
- [10] 姚慧丽, 张悦娇, 侯盛楠. 一类带有逐段常变量的二阶微分方程的概周期解[J]. 哈尔滨理工大学学报, 2019, 24(3): 143. YAO HUILI, ZHANG YUEJIAO, HOU SHENGAN. Periodic Solutions for a Class of Second-order Differential Equations with Piecewise Constant Variables [J]. Journal of Harbin University of Science and Technology, Harbin, 2019, 24(3): 143.
- [11] GU Y, REN Y, SAKTHIVEL R. Square-Mean Pseudo Almost Automorphic Mild Solutions for Stochastic Evolution Equations Driven By Brownian Motion [J]. Stoch Anal Appl, 2016, 34(3): 528.
- [12] CHANG Y K, FENG T W. Properties on Measure Pseudo Almost Automorphic Functions and Applications to Fractional Differential Equations in Banach Space[J]. Electron J Differ Eq, 2018, 2018(47): 1.
- [13] CHANG Y K, ZHENG S. Weighted Pseudo Almost Automorphic Solutions to Functional Differential Equations with Infinite Delay [J]. Electron J Differ Eq, 2016, 2016(286): 1.
- [14] WAZEWSKA-CZYZEWSKA M, LASOTA A. Mathematical Problems of the Dynamics of a System of Red Blood Cells [J]. Mat Stos, 1976, 17(6): 23.
- [15] 景冰清, 王丽丽. Lasota-Ważewska 模型的唯一周期正解的存在性[J]. 太原科技大学学报, 2008, 29(3): 217. JING BINGQING, WANG LILI. The Existence of Unique Periodic Positive Solution for Lasota-Ważewska Model [J]. Journal of Taiyuan University of Science and Technology, 2008, 29(3): 217.
- [16] 柏琼, 冯春华. 具非线性脉冲时滞的 Lasota-Ważewska 模型概周期解的存在性与稳定性[J]. 广西科学, 2011, 18(4): 329. BAI QIONG, FENG CHUNHUA. The Existence and Stability of Lasota-Ważewska Model with Nonlinear Pulse Delay [J]. Guangxi Science, 2011, 18(4): 329.
- [17] 王丽, 梁博强, 刘金. 一类 Lasota-Ważewska 模型伪概周期解的全局吸引性[J]. 应用数学和力学, 2018, 39(09): 1091. WANG LI, LIANG JINBO, LIU JIN. The Global Attraction of Pseudo-periodic Solutions of a Class of Lasota-Ważewska Model [J]. Appl Math Mech, 2018, 39(09): 1091.
- [18] 陈晓英, 施春玲. 一类具有无穷时滞的 Lasota-Ważewska 模型的概周期解 [J]. 福州大学学报 (自然科学版), 2014, 42(1): 8. CHEN XIAOYING, SHI CHUNLING. The Periodic Solution of a Class of Lasota-Ważewska Model with Infinite Delay [J]. Journal of Fuzhou University (Natural Science Edition), 2014, 42(1): 8.
- [19] CHEN L, CHEN F. Positive Periodic Solution of the Discrete Lasota-Ważewska Model with Impulse [J]. J Differ Equ Appl, 2014, 20(3): 406.
- [20] ZHANG CHUANYI. Almost Periodic Functions and Ergodicity [M]. Science Press, 2003.

(编辑:温泽宇)